ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ……………………………
ΤΜΗΜΑ…… ..………
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ……..…………
ΒΑΘΜΟΣ………………………………………

Λύσεις στο Διαγώνισμα Μαθηματικών Γ’ Λυκείου 30-3-2024

Θέμα Α

Α1. Θεωρία

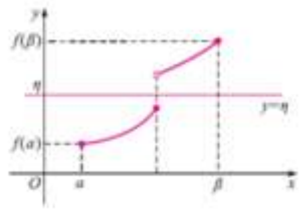
Α2. Θεωρία

Α3.

α. Σ β. Λ

Α4. α. Ψ

β. Θα πρέπει επιπλέον η f να είναι συνεχής στο [α, β]. Αν δεν είναι συνεχής στο [α, β] όπως φαίνεται στο σχήμα δεν παίρνει υποχρεωτικά όλες τιμές ανάμεσα στα f(α) και f(β)



Θέμα Β

$$f(x)=x-1+\frac{1}{x-1}$$

Β1. Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathrm{A}=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$, είναι συνεχής στο Α (ως άθροισμα συνεχών) και δεν είναι άρτια ή περιττή ή περιοδική. Επίσης, η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2} \quad \text{και} \quad f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$$, για κάθε $x\neq 1$

Οι οριακές τιμές της f , το πρόσημο των f' και f'' , η μονοτονία , τα κοίλα και οι θέσεις τοπικών ακροτάτων της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα .

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f''		$-$		$-$	$\Vert$	$+$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
			τ.μ.				**τ.ε.**		

Το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

Οριακές Τιμές - Ασύμπτωτες :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x-1+\frac{1}{x-1}\right) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x-1+\frac{1}{x-1}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\left(x-1+\frac{1}{x-1}\right) = +\infty \text{ και } \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}\left(x-1+\frac{1}{x-1}\right) = -\infty$$

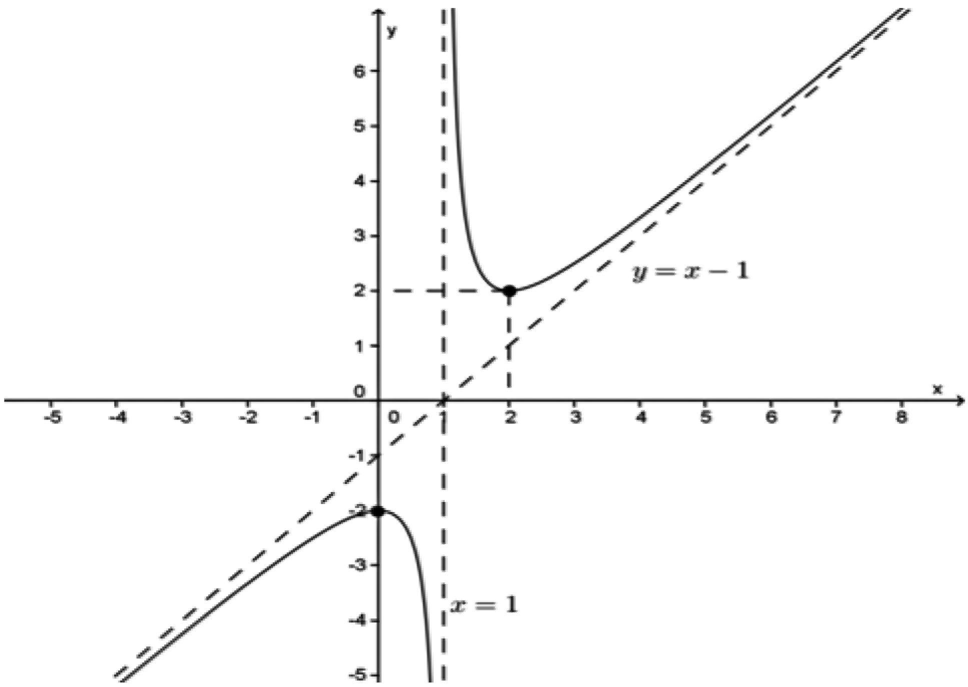
Άρα η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2-x}\right) = 1 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{1}{x-1}\right) = -1$$

Άρα η ευθεία $y = x-1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο +∞.

Ομοίως βρίσκουμε ότι η ευθεία $y = x-1$ είναι ασύμπτωτη της C_f και στο -∞.

Η **γραφική παράσταση της *f*** είναι το παρακάτω σχήμα :



Β2. Από ερώτημα Β1 και τη γραφική παράσταση της f έχουμε ότι η εξίσωση $f(x)=\lambda$:

Αν $\lambda \in (-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ έχει ακριβώς δύο λύσεις

Αν $\lambda = 2$ ή $\lambda=-2$ έχει ακριβώς μία λύση

Αν $\lambda \in (-2,2)$ είναι αδύνατη

Β3. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$\mathrm{E}(\Omega) = \int_2^6 |f(x)-(x-1)|\,dx = \int_2^6 |f(x)-(x-1)|\,dx =$$
$$= \int_2^6 \left|x-1+\frac{1}{x-1}-(x-1)\right|dx = \int_2^6 \frac{1}{x-1}dx = \left[\ln|x-1|\right]_2^6 = \ln 5 \tau\mu$$

<u>Θέμα Γ</u>

Γ1.

i) Η τετμημένη της κορυφής Α είναι α και αν x_Δ είναι η τετμημένη της κορυφής Δ, τα μήκη των πλευρών ΑΒ και ΔΓ του ορθογωνίου θα είναι (ΑΒ) = e^α και (ΔΓ) = $\frac{e}{x_\Delta}$

Όμως (ΑΒ) = (ΔΓ), άρα $e^\alpha = \frac{e}{x_\Delta} \Leftrightarrow x_\Delta = \frac{e}{e^a} \Leftrightarrow x_\Delta = e^{1-a}$

ii) Είναι (ΑΔ) = $|x_\Delta - x_A|$ = $x_\Delta - x_A$ = $e^{1-a}-\alpha$ και (ΑΒ) = e^α , οπότε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι Ε(α) = (ΑΒ) · (ΑΔ) = $\left(e^{1-a}-\alpha\right)\cdot e^\alpha = e - ae^a$, α < 1 .

Γ2. Για κάθε α < 1 η Ε είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με :

$$E'(a) = -(e^a - ae^a) = -e^a(1+a)$$

Η ρίζα και το πρόσημό της Ε'(α) φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο προσδιορίζουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τη μέγιστη τιμή της Ε(α).

a	-∞ -1 1
$E'(a)$	+ 0 −
$E(a)$	

Επομένως η μέγιστη τιμή του εμβαδού του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $E(-1) = e + \frac{1}{e}$

Γ3. Θα βρούμε το σύνολο τιμών της Ε(α)

$\lim_{a\to-\infty} E(a) = \lim_{a\to-\infty}(e - ae^a) = e - 0 = e$ διότι $\lim_{a\to-\infty} ae^a = \lim_{a\to-\infty} \frac{a}{e^{-a}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}} \lim_{a\to-\infty} \frac{1}{-e^{-a}} = 0$

$\lim_{a\to 1}(e - ae^a) = 0$

$$(E)\left((-\infty,-1]\right) \underset{E\uparrow}{\overset{E\ συνεχής}{=}} \left(\lim_{a\to-\infty} E(a), E(-1)\right] = \left(e, e + \frac{1}{e}\right]$$

$$(E)\left([-1,1)\right) \underset{E\downarrow}{\overset{E\ συνεχής}{=}} \left(\lim_{a\to 1} E(a), E(-1)\right] = \left(0, e + \frac{1}{e}\right]$$

$1 \in (E)\left([-1,1)\right) = \left(0, e + \frac{1}{e}\right]$ και η Ε είναι γνησίως μονότονη στο $[-1,1)$ άρα

υπάρχει μοναδικό $a_0 \in [-1,1)$ τέτοιο ώστε $E(a_0) = 1$

$1 \notin (E)\left((-\infty,-1]\right) = \left(e, e + \frac{1}{e}\right]$

Επομένως υπάρχει ακριβώς μία τιμή του α, η οποία ανήκει στο διάστημα (−1 , 1),

για την οποία το εμβαδόν του ΑΒΓΔ γίνεται ίσο με 1.

Θέμα Δ

Δ1. Θέτουμε

$$g(x) = \frac{f(x)(e^x - x - 1)}{x \cdot \etaμx} \Leftrightarrow g(x)x \cdot \etaμx = f(x)(e^x - x - 1) \Leftrightarrow f(x) = \frac{g(x)x \cdot \etaμx}{e^x - x - 1}$$

για x κοντά στο 0 .

Ισχύει : $\lim_{x\to 0} g(x) = -\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} g(x)\frac{x\cdot \eta\mu x}{e^x-x-1}=-\frac{1}{2}\cdot\ 2=\ -1\ \text{διότι:}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\eta\mu x}{e^x-x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x}{e^x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x}{e^x}=2$$

Η f είναι συνεχής στο 0 ως παραγωγίσιμη άρα $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=-1$.

$$\int_0^1 (xf'(x)+f(x))dx=\frac{1}{e}\Leftrightarrow\int_0^1 \left(xf(x)\right)' dx=\frac{1}{e}\Leftrightarrow\left[xf(x)\right]_0^1=\frac{1}{e}\Leftrightarrow f(1)=\frac{1}{e}$$

Δ2.

$$\int_0^1 (f(x)+f'(x))e^x\,dx=\int_0^1 e^x f(x)+f'(x)e^x dx=\left[e^x f(x)\right]_0^1=ef(1)-e^0 f(0)=e\cdot\frac{1}{e}-1\cdot(-1)=2$$

Δ3. Η g είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

(ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων) . Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

τέτοιο ώστε :

$$g'(\xi)=\frac{g\left(\frac{\pi}{2}\right)-g(0)}{\frac{\pi}{2}-0}=\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}-f(0)\sigma\upsilon\nu 0}{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

Δ4. $g'(x)=f'(x)\sigma\upsilon\nu x-f(x)\eta\mu x, x\in\mathbb{R}$

Η g' είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

(αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη) και $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=g'(0)$ διότι:

$$g'(0)=f'(0)\sigma\upsilon\nu 0-f(0)\eta\mu 0=f'(0)$$

$$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)= f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}- f\left(\frac{\pi}{2}\right)\eta\mu\frac{\pi}{2}=-f\left(\frac{\pi}{2}\right)= f'(0)$$, αφού

$$f'(0)+ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \Leftrightarrow f'(0)=-f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Από θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi_1 \in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, τέτοιο ώστε $g''(\xi_1)=0$.