ΔίΚΤΥΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΑΝΩΛΙΤΣΗΣ	ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ…………………………… ΤΜΗΜΑ…… ..……… ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ………………… ΒΑΘΜΟΣ………………………………………

Λύσεις στο Διαγώνισμα Μαθηματικών Β προς Γ Λυκείου 30-3-2024

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία

Α2. Θεωρία

Α3.

α) Λ β) Λ γ) Λ δ) Σ δ) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f(x)=\dfrac{x^2+x-12}{x-3}$

Η f ορίζεται όταν $x-3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 3$. Άρα , $A_f=\mathbb{R}-\{3\}$

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+4)}{x-3}=3+4=7.$$

Β2. α) $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x)=-2$ β) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=2$ γ) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=0$

δ) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=0$ ε) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2$ ζ) $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=-2$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A_f=(0,+\infty)$.

Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$. Τότε ,

$$x_1<x_2 \Leftrightarrow \ln x_1<\ln x_2 \Leftrightarrow -\ln x_1>-\ln x_2 \Leftrightarrow 1-\ln x_1>1-\ln x_2 \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

Άρα, $f \downarrow (0,+\infty)$

Γ2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $e^x + 1 \neq 0$, άρα η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R}$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $g(x_1) = g(x_2)$. Τότε,

$$g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow \frac{e^{x_1}}{1+e^{x_1}} = \frac{e^{x_2}}{1+e^{x_2}} \Leftrightarrow e^{x_1}(1+e^{x_2}) = e^{x_2}(1+e^{x_1})$$

$$\Leftrightarrow e^{x_1} + e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_2} + e^{x_1}e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα, η συνάρτηση g είναι «1-1».

Γ3. Η συνάρτηση g είναι «1-1» και άρα αντιστρέφεται

$$y = g(x) \Leftrightarrow y = \frac{e^x}{1+e^x} \Leftrightarrow y(1+e^x) = e^x \Leftrightarrow y = e^x(1-y) \overset{y\neq 1}{\Leftrightarrow} e^x = \frac{y}{1-y}$$

$$\overset{y\in(0,1)}{\Leftrightarrow} \ln e^x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right) \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right), y \in (0,1)$$

Άρα, $g^{-1}(x) = ln\left(\frac{x}{1-x}\right), x \in (0,1)$

Γ4. Η $g^{-1} \circ f$ ορίζεται όταν :

$$\begin{cases} x \in A_f \\ f(x) \in A_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0,+\infty) \\ (1-\ln x) \in (0,1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 0 < 1-\ln x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -1 < -\ln x < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 0 < \ln x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1 < x < e \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1,e)$$

και έχει τύπο $g^{-1}(f(x)) = ln\left(\frac{1-ln x}{1-(1-ln x)}\right) = ln\left(\frac{1-ln x}{ln x}\right), x \in (1,e)$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε ,

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow f^3(x_1) = f^3(x_2) \Leftrightarrow 2f^3(x_1) = 2f^3(x_2)$ **(1)**

$f(x_1) = f(x_2)$ **(2)**

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε $x_1+16=x_2+16 \Leftrightarrow x_1=x_2$

Άρα, η συνάρτηση f είναι «1-1» και άρα αντιστρέφεται

Δ2. Η συνάρτηση f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f άρα $A_{f^{-1}}=\mathbb{R}$

Στη σχέση $2f^3(x)+f(x)=x+16$ θέτουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ και έχουμε :

$$2f^3(f^{-1}(x))+f(f^{-1}(x))=f^{-1}(x)+16 \Leftrightarrow$$
$$2x^3+x=f^{-1}(x)+16 \Leftrightarrow f^{-1}(x)=2x^3+x-16$$

Δ3. Ισχύει ότι $f^{-1}(2)=2$

$$f^{-1}(x)=2 \Leftrightarrow f^{-1}(x)=f^{-1}(2) \overset{f^{-1}\,1-1}{\Leftrightarrow} x=2$$

$$f(x)=2 \overset{f^{-1}\,1-1}{\Leftrightarrow} f^{-1}(f(x))=f^{-1}(2) \Leftrightarrow x=2$$

Δ4.

$$f(f^{-1}(x^2-4)+18)=2 \overset{f^{-1}\,1-1}{\Leftrightarrow} f^{-1}\Big(f(f^{-1}(x^2-4)+18)\Big)=f^{-1}(2)$$
$$\Leftrightarrow f^{-1}(x^2-4)+18=2 \Leftrightarrow f^{-1}(x^2-4)=-16 \Leftrightarrow f^{-1}(x^2-4)=f^{-1}(0)$$
$$\overset{f^{-1}\,1-1}{\Leftrightarrow} x^2-4=0 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$$