

Διαγώνισμα Μαθηματικών Γ' Λυκείου

Θέμα Α

A1. Έστω f μια **συνεχής συνάρτηση** σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια

παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

(Μονάδες 9)

A2. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

(Μονάδες 6)

A3. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι **σωστές ή λανθασμένες**.

α. Για τις συναρτήσεις f και g που έχουν συνεχείς παραγώγους στο $[a, \beta]$ ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx - \int_{\beta}^{\alpha} f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta}$$

β. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι κυρτή στο διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη σε αυτό. Τότε ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

(Μονάδες 6)

A4. Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ με

$f(\alpha) \neq f(\beta)$ παίρνει υποχρεωτικά όλες τις τιμές ανάμεσα στα $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ »

α. Να χαρακτηρίσετε τον παρακάτω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ αν είναι ψευδής

(Μονάδες 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο α. ερώτημα.

(Μονάδες 3)

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-1}$.

B1. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά την f .

(Μονάδες 9)

B2. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της $f(x) = \lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

B3. Αν η ευθεία $\varepsilon : y = x - 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , της ευθείας ε και των ευθειών $x = 2$ και $x = 6$

(Μονάδες 8)

Θέμα Γ

Στο παρακάτω σχήμα το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει τις κορυφές Α και Δ πάνω στον άξονα $x'x$ και τις κορυφές Β και Γ πάνω στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x$, $x < 1$ και $g(x) = \frac{e}{x}$, $x > 1$, αντίστοιχα. Έστω $A(\alpha, 0)$ με $\alpha < 1$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

i. η τετμημένη της κορυφής Δ είναι $x_\Delta = e^{1-\alpha}$, (Μονάδες 6)

ii. το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $E(\alpha) = e - ae^\alpha$, $\alpha < 1$.

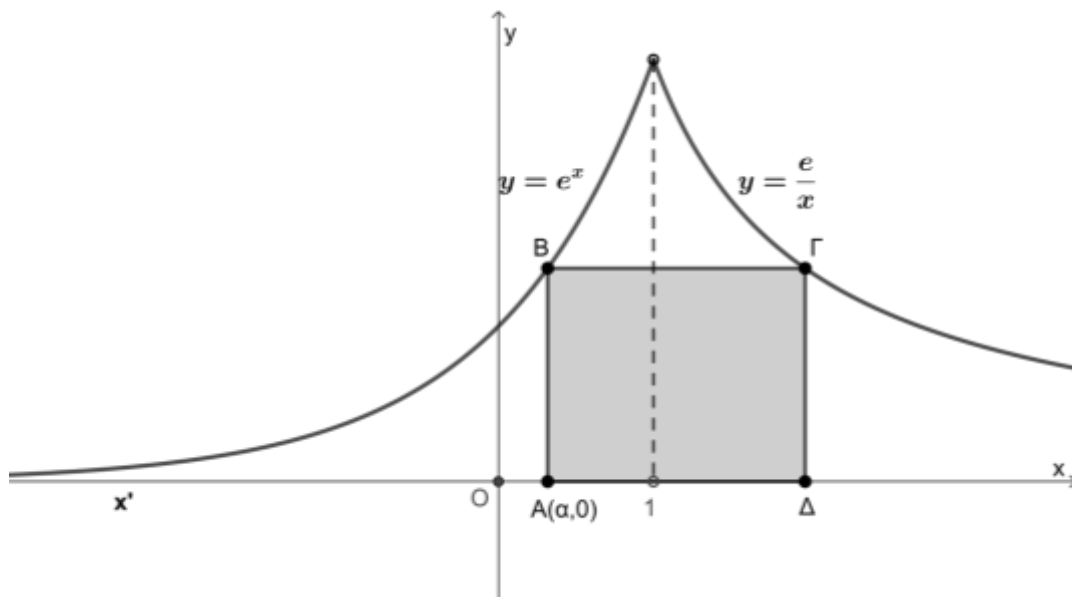
(Μονάδες 6)

Γ2. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του ορθογωνίου ΑΒΓΔ .

(Μονάδες 7)

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς μία τιμή του α , για την οποία το εμβαδόν του ΑΒΓΔ γίνεται ίσο με 1.

(Μονάδες 6)



Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)(e^x - x - 1)}{x \cdot \eta\mu x} = -\frac{1}{2}$ και
- $\int_0^1 (xf'(x) + f(x)) dx = \frac{1}{e}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = -1$ και $f(1) = \frac{1}{e}$.

(μονάδες 6)

Δ2. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 (f(x) + f'(x))e^x dx$.

(μονάδες 5)

Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = \frac{2}{\pi}$.

(μονάδες 6)

Δ4. Αν $f'(0) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, τέτοιο ώστε $g''(\xi_1) = 0$.

(μονάδες 8)