ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΔΙΚΤΥΟ ΜΑΝΩΛΙΤΣΗΣ	ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ…………………………… ΤΜΗΜΑ…… ..……… ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ……..………… ΒΑΘΜΟΣ………………………………………

Λύσεις στο Διαγώνισμα Μαθηματικών

Γ’ Λυκείου 10-2-2024

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία

Α2. Θεωρία

Α3. α. Λ **β.** Σ

Α4. Γ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1, x>0$. Έχουμε, για κάθε x>0 , h

συνεχής ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμη με $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}, x>0$,

οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	0 1 $+\infty$
$f'(x)$	$-$ 0 $+$
$f(x)$	$\searrow$ 0 $\nearrow$

Συνεπώς η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$,

άρα έχει ολικό ελάχιστο το 0 για x = 1 , δηλαδή ισχύει $h(x)\geq h(1) \Leftrightarrow \ln x+\frac{1}{x}-1\geq 0$,

για κάθε x>0.

Β2.

Η $g(x)=\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$, x > 0 , είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e},1\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και

- $g\left(\frac{1}{e}\right)=\ln\frac{1}{e}+2e-e^2=-1+2e-e^2=-(1-e)^2<0$,
- $g(1)=1>0$.

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα x_0 της g στο $\left(\frac{1}{e},1\right)$.Επίσης , για κάθε x > 0 ισχύει :

$$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}=\frac{x^2-2x+2}{x^3}>0$$

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, άρα η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

B3. Έχουμε, για κάθε x>0 , f συνεχής ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=(e^x\cdot\ln x)'=e^x\cdot\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}=e^x\cdot\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$$

και από το ερώτημα B1 προκύπτει $f'(x)>0$, συνεπώς η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα σε ανοιχτό διάστημα, δεν έχει ακρότατα.

B4.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με

$$f''(x)=\left(e^x\cdot\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}\right)'=e^x\cdot\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}+e^x\cdot\frac{1}{x}-e^x\cdot\frac{1}{x^2}=$$

$$e^x\cdot\left(\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=e^x\cdot g(x)$$

Από το ερώτημα B2 η g έχει μοναδική ρίζα $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ και είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$,οπότε:

$$x<x_0\Rightarrow g(x)<g(x_0)=0$$

$x > x_0 \Rightarrow g(x) > g(x_0) = 0$

και έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών

x	$0 \quad\quad x_0 \quad\quad +\infty$
$f''(x)$	$- \quad 0 \quad +$
$f(x)$	

Το σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f .

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις για τις οποίες ισχύουν $f(3) = g(3) + 1$ και $f'(x) - g'(x) = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία $y = 3x - 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, τότε:

Γ1. Η ευθεία $y = 3x - 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ άρα ισχύει ότι

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 3$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - 3x \right) = -1$.

Γ2. $f'(x) - g'(x) = 2 \Leftrightarrow (f(x) - g(x))' = (2x)'$

Επομένως, $f(x) - g(x) = 2x + c, \quad c \in \mathbb{R}$. Ισχύει ότι

$f(3) - g(3) = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot 3 + c = 1 \Leftrightarrow c = -5$

Άρα, $f(x) - g(x) = (f - g)(x) = 2x - 5, x \in \mathbb{R}$

Γ3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $g(x) = f(x) - 2x + 5$. Άρα,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - 2x + 5}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} - \frac{2x - 5}{x} = 3 - 2 = 1$$

και $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(g(x) - x \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - 2x + 5 - x \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - 3x + 5 \right) = -1 + 5 = 4$

Άρα, η ευθεία $y = x + 4$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$

Γ4. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{xf(x)+xg(x)-4x^2}{f(x)+g(x)+\eta\mu x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+g(x)-4x}{\frac{f(x)}{x}+\frac{g(x)}{x}+\frac{\eta\mu x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-3x+g(x)-x}{\frac{f(x)}{x}+\frac{g(x)}{x}+\frac{\eta\mu x}{x}}=$$

$$=\frac{-1+4}{3+1+0}=\frac{3}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 3 φορές παραγωγίσιμη

- $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1+f(0)$
- $f'(0) < f(1)-f(0)$ και
- $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Δ1. Ισχύει ότι f'' συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμη και $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως, η f'' διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και άρα η f' είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ (f' συνεχής ως παραγωγίσιμη).

Επιπλέον, f συνεχής στο $[0,1]$ (ως παραγωγίσιμη) και παραγωγίσιμη στο (0,1). Από ΘΜΤ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)-f(0)$. Ισχύει από δεδομένα ότι $f'(0) < f(1)-f(0)$

Άρα, $f'(0) < f(1)-f(0) \Leftrightarrow f'(0)<f'(\xi)$

Αφού , η f' είναι γνησίως μονότονη , 0 < ξ και ισχύει $f'(0)<f'(\xi)$ έχουμε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Δ2. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$ έχει εξίσωση $\varepsilon: y-f(0)=f'(0)(x-0)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1+f(0)\Rightarrow f'(0)=1+f(0)$$

Θεωρώ $h(x)=\frac{f(x)}{x}, x\neq 0$. Ισχύει $\lim_{x\to 0}h(x)=1+f(0)$ και $f(x)=xh(x)$ για x κοντά

στο 0. Επιπλέον , f συνεχής στο 0 ως παραγωγίσιμη , άρα

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}xh(x)=0\cdot(1+f(0))=0$$

Επομένως, $f'(0)=1$ και έχουμε :

$$\varepsilon: y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y=x$$

Δ3. Η συνάρτηση f είναι κυρτή $\mathbb{R}$ άρα η C_f βρίσκεται πάνω την εφαπτομένη της στο (0,f(0)) , με εξαίρεση το σημείο επαφής, επομένως ισχύει , για κάθε $\mathbb{R}$ ότι : $f\left(x\right)\geq x \Leftrightarrow f(x)-x\geq 0\Leftrightarrow g(x)\geq 0\Leftrightarrow g(x)\geq g(0)$ άρα η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 0 , το g(0) = 0.

Δ4. $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{xg(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\eta\mu x}{x}}{g(x)}=+\infty$ διότι $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$, $\lim_{x\to 0}g(x)=g(0)=0$ (αφού g συνεχής) και $g(x)\geq 0$ για κάθε $\mathbb{R}$