

Διαγώνισμα Μαθηματικών Γ' Λυκείου

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει **τοπικό μέγιστο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$

(μονάδες 9)

A2. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$;

(μονάδες 6)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

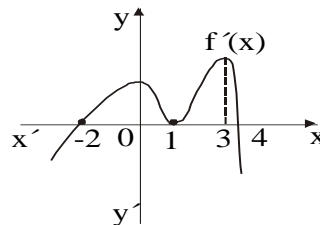
α. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) = 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

β. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

(μονάδες 6)

A4.

Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο \mathbb{R} . Τότε για τη συνάρτηση f ισχύει



A. στο διάστημα $[-2,0]$ η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω

B. στο διάστημα $[1,3]$ ισχύει $f''(x) = 0$

Γ. στο διάστημα $[0,1]$ η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω

Δ. στο διάστημα $[-2,1]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα

Ε. όλα τα παραπάνω

(μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Β

B1. Να δείξετε ότι $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1$ για κάθε $x > 0$.

(μονάδες 6)

B2. Να δείξετε ότι η $g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$

(μονάδες 5)

B3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot \ln x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .

(μονάδες 8)

B4. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής τη συνάρτηση f του προηγούμενου ερωτήματος.

(μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις για τις οποίες ισχύουν

$f(3) = g(3) + 1$ και $f'(x) - g'(x) = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία $y = 3x - 1$ είναι

ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, τότε:

Γ1. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x)$.

(μονάδες 4)

Γ2. Να βρείτε τη συνάρτηση $f - g$.

(μονάδες 5)

Αν ισχύει ότι $(f - g)(x) = 2x - 5, x \in \mathbb{R}$, να βρείτε :

Γ3. Την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$

(μονάδες 8)

Γ4. Το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + xg(x) - 4x^2}{f(x) + g(x) + \eta\mu x}$

(μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι 3 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 + f(0)$
- $f'(0) < f(1) - f(0)$ και
- $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο \mathbb{R} .

(μονάδες 8)

Δ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$.

(μονάδες 5)

Αν επιπλέον $g(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$, τότε:

Δ3. Να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

(μονάδες 7)

Δ4. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{xg(x)}$

(μονάδες 5)