ΔΙΚΤΥΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΑΝΩΛΙΤΣΗΣ	ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ………………………… ΤΜΗΜΑ…… ..……… ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ……..………… ΒΑΘΜΟΣ………………………………………

Λύσεις στο Διαγώνισμα Μαθηματικών Γ' Λυκείου 9-12-2023

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία

Α2. Θεωρία

Α3. α. Λ **β.** Λ

Α4. α. Ψ

β. Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$, παρατηρούμε ότι ενώ είναι ορισμένη και συνεχής στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ δεν είναι σταθερή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

ΘΕΜΑ Β

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x^3 - 1$ και $g(x) = 9x^2 - 12x + 4$

Β1. *Για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ $(f-g)(x) = 2x^3 - 1 - 9x^2 + 12x - 4 = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5,$

Η f – g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη με

$$(f-g)'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2)$$

$$(f-g)'(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 2$$

Το πρόσημο της παραγώγου και η μονοτονία της f – g φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$ 1 2 $+\infty$
$f'(x)$	+ 0 − 0 +
f	↗ ↘ ↗

Β2. $(f-g)\big((-\infty,1]\big) \overset{f-g \text{ συνεχής}}{\underset{f-g\uparrow}{=}} \left(\lim\limits_{x\to-\infty}(f-g)(x), (f-g)(1)\right] = (-\infty, 0]$

$$(f-g)((1,2]) \overset{f-g \text{ συνεχής}}{\underset{f-g\downarrow}{=}} \left[(f-g)(2), \lim_{x\to 1}(f-g)(1)\right) = [-1,0)$$

$$(f-g)([2,+\infty)) \overset{f-g \text{ συνεχής}}{\underset{f-g\uparrow}{=}} \left[(f-g)(2), \lim_{x\to +\infty}(f-g)(x)\right) = [-1,+\infty)$$

Σύνολο τιμών f – g $(-\infty,0] \cup [-1,0] \cup [-1,+\infty) = \mathbb{R}$

B3. $0 \in (f-g)((-\infty,1]) = (-\infty,0]$ και η f-g είναι γνησίως μονότονη στο $(-\infty,1]$ άρα

υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-\infty,1]$ τέτοιο ώστε $(f-g)(x_1) = 0$ (ειδικότερα $x_1 = 1$)

$0 \notin (f-g)((1,2]) = [-1,0)$ άρα η f-g δεν έχει ρίζα στο $(1,2]$

$0 \in (f-g)([2,+\infty)) = [-1,+\infty)$ και η f-g είναι γνησίως μονότονη στο $[2,+\infty)$ άρα

υπάρχει μοναδικό $x_2 \in [2,+\infty)$ τέτοιο ώστε $(f-g)(x_2) = 0$

Άρα, η εξίσωση $(f-g)(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες.

B4.

- f-g συνεχής στο $[x_1,x_2] \subset \mathbb{R}$, ως πολυωνυμική
- f-g παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) ως πολυωνυμική
- $(f-g)(x_1) = (f-g)(x_2) = 0$.

επομένως από το θεώρημα Rolle , υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $\xi \in (x_1,x_2)$ τέτοιος, ώστε $(f-g)'(\xi) = 0$.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως παραγωγίσιμη , άρα η h είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, ως πηλίκο συνεχών . Επίσης , η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$h'(x) = \left(\dfrac{f(x)}{x^2}\right)' = \dfrac{f'(x)x^2 - f(x)2x}{x^4} = \dfrac{x(f'(x)x - 2f(x))}{x^4} = \dfrac{x^2}{x^4} = \dfrac{1}{x^2} > 0$ για κάθε

x > 0. Άρα, η h είναι γνησίως αύξουσα στο $x \in (0,+\infty)$

Γ2. Για κάθε x > 0 έχουμε $xf'(x) - 2f(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4} = \dfrac{x^2}{x^4} \Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x^2}\right)' = \left(-\dfrac{1}{x}\right)'$

Άρα, $\dfrac{f(x)}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + c, c \in \mathbb{R}$. Για x = 1 έχουμε $\dfrac{f(1)}{1^2} = -\dfrac{1}{1} + c \Leftrightarrow c = 1$

Επομένως, $\dfrac{f(x)}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + 1 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - x, \ x > 0$

Γ3. Η C_g διέρχεται από το σημείο $(1,0)$ άρα $g(1)=0$. Αφού , g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ισχύει ότι g συνεχής στο $\mathbb{R}$. Άρα, $\lim_{x\to 1} g(x)=g(1)=0$.Επίσης , $g'(x)=f(x)=x^2-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{\ln^2 x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{g'(x)}{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2}{2\ln x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-2x}{2\cdot\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε x > 1 έχουμε :

$$g'(x)=2f(x)f'(x)-\frac{1}{x}=\frac{1}{x}(2xf(x)f'(x)-1)=\frac{1}{x}(2\cdot\frac{1}{2}-1)=0$$

οπότε η g είναι σταθερή.

Ισχύει $g(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$ και $g(e)=f^2(e)-\ln e\Rightarrow c=1-1\Rightarrow c=0$.

Άρα $g(x)=0$, οπότε $f^2(x)=\ln x,\ x>1$.

Επιπλέον η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη και ισχύει ότι $f^2(x)=\ln x\neq 0$ για κάθε x > 1 οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο . Επιπλέον , $f(e)>0$

Άρα, για κάθε $x>1$ έχουμε $f(x)>0$, οπότε $f(x)=\sqrt{\ln x}$, $x>1$.

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}>0$ για κάθε $x>1$. Άρα , η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

Δ3. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x>1$ ισχύει:

$$\frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\ln x,\ x>1$ η οποία ικανοποιεί τις υποθέσεις του ΘΜΤ σε κάθε διάστημα της μορφής $[x, x+1],\ x>1$.

Επομένως, υπάρχει $\xi\in(x, x+1)$ ώστε $h'(\xi)=\dfrac{h(x+1)-h(x)}{x+1-x}=\ln(x+1)-\ln x$.

Ισχύει ότι $h'(\xi)=\dfrac{1}{\xi}$. Άρα, $x<\xi<x+1\Rightarrow\dfrac{1}{x+1}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{x}\Rightarrow\dfrac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\dfrac{1}{x}$