

## Διαγώνισμα Μαθηματικών Γ' Λυκείου

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν η  $f$  είναι **συνεχής** στο  $\Delta$  και  $f'(x) = 0$  για κάθε **εσωτερικό** σημείο  $x$  του  $\Delta$ , να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

(μονάδες 8)

**A2.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και γράψετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

(μονάδες 7)

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη και γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ , τότε ισχύει  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

**β.** Έστω δύο συναρτήσεις  $f, g$  ορισμένες σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν οι  $f, g$  είναι συνεχείς στο  $\Delta$  και  $f'(x) = g'(x)$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε ισχύει  $f(x) = g(x)$  για κάθε  $x \in \Delta$ .

(μονάδες 6)

**A4.** Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει  $f'(x) = 0$  για κάθε  $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$  είναι σταθερή στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ »

**α.** Να χαρακτηρίσετε τον παρακάτω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι αληθής, ή το γράμμα **Ψ** αν είναι ψευδής.

(μονάδες 1)

**β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο **α.** ερώτημα.

(μονάδες 3)

## **ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπους:

$$f(x) = 2x^3 - 1 \text{ και } g(x) = 9x^2 - 12x + 4$$

- B1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f - g$  ως προς τη μονοτονία . **(μονάδες 8)**
- B2.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f - g$  . **(μονάδες 6)**
- B3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $(f - g)(x) = 0$  έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες. **(μονάδες 6)**
- B4.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (x_1, x_2)$  , όπου  $x_1, x_2$  οι ρίζες που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, τέτοιο ώστε  $(f - g)'(\xi) = 0$ . **(μονάδες 5)**

## **ΘΕΜΑ Γ**

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν  $f(1) = 0$  και  $xf'(x) - 2f(x) = x$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ .

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h(x) = \frac{f(x)}{x^2}$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $x \in (0, +\infty)$  **(μονάδες 7)**
- Γ2.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = x^2 - x$  ,  $x > 0$ . **(μονάδες 8)**
- Γ3.** Δίνεται επιπλέον συνάρτηση  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  , παραγωγίσιμη , για την οποία ισχύουν ότι η γραφική της παράσταση  $C_g$  διέρχεται από το σημείο  $(1, 0)$  και  $g'(x) = f(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  . Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{\ln^2 x}$  . **(μονάδες 10)**

## **ΘΕΜΑ Δ**

Έστω  $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε για κάθε  $x > 1$  να ισχύει

$$xf(x)f'(x) = \frac{1}{2} \text{ και } f(e) = 1.$$

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = f^2(x) - \ln x$ ,  $x > 1$  είναι σταθερή.

**(μονάδες 7)**

**Δ2.** Να βρείτε τον τύπο της  $f$ .

**(μονάδες 6)**

Έστω  $f(x) = \sqrt{\ln x}$ ,  $x > 1$ .

**Δ3.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία.

**(μονάδες 5)**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 1$  ισχύει  $\frac{1}{x+1} < f^2(x+1) - f^2(x) < \frac{1}{x}$ .

**(μονάδες 7)**