

Διαγώνισμα Μαθηματικών Γ' Λυκείου

ΘΕΜΑ Α

A1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a^x, a > 0, x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha^x)' = \alpha^x \ln \alpha, x \in \mathbb{R} \quad (\text{μονάδες } 8)$$

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ; (μονάδες 7)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g'(x_0)$.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A = (\alpha, \beta]$, τότε

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x), f(\beta) \right]$$

γ) Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* και ισχύει

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \text{ δηλαδή } (\ln|x|)' = \frac{1}{x}. \quad (\text{μονάδες } 6)$$

A4. Θεωρείστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παρακάτω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ αν είναι ψευδής. (μονάδες 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο α. ερώτημα.

(μονάδες 3)

ΘΕΜΑ Β

B1. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x + 2, & x < 1 \\ 2\sqrt{x^2 + 3}, & x \geq 1 \end{cases}$ είναι

παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.

(μονάδες 9)

B2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2}, x \neq 2$. Να βρείτε την εξίσωση της

εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(3, f(3))$.

(μονάδες 8)

B3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 e^x$.

α) Να βρείτε τις $f'(x)$ και $f''(x)$.

(μονάδες 4)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των α, β, γ ώστε

$$\alpha f(x) + \beta f'(x) + \gamma f''(x) = f(x)$$

(μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-2} + x - 3$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

(μονάδες 5)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(μονάδες 7)

Γ2. Έστω $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x + 2$. Να εξετάσετε αν υπάρχουν εφαπτόμενες της C_f που είναι : α) παράλληλες στην ευθεία $y = 2x$ και β) κάθετες στην ευθεία

$y = \frac{1}{2}x$. Αν υπάρχουν, να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων αυτών.

(μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο 3, για την οποία ισχύει ότι :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)}{\eta\mu 2h} = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(3) = 0$.

(μονάδες 5)

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 3.

(μονάδες 6)

Δ3. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(3, f(3))$ διέρχεται από το σημείο $N(1, -8)$, τότε :

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.

(μονάδες 8)

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)\sqrt{x-2} - f(x)}{x^2 - 6x + 9}$.

(μονάδες 6)