ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ……………………………
ΤΜΗΜΑ…… ..………
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ……..…………
ΒΑΘΜΟΣ………………………………………

Λύσεις στο Διαγώνισμα Μαθηματικών

Γ’ Λυκείου 21-10-2023

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία

Α2. Θεωρία

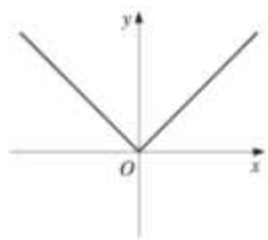
Α3.

α) Λ β) Σ γ) Σ

Α4. α. Ψ

β. Η συνάρτηση f(x) = |x| είναι συνεχής στο $x_o = 0$, αφού είναι συνεχής στο R, αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη σε αυτό αφού

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$ και $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to -} \frac{-x}{x} = -1$



ΘΕΜΑ Β

Β1. Εξετάζουμε πρώτα την f ως προς τη συνέχεια στο 1

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(-x^2+3x+2) = 4$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 2\sqrt{x^2+3} = 4$ και $f(1)=4$. Άρα , f συνεχής στο 1.

Παράγωγος στο 1

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x^2+3x+2-4}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x^2+3x-2}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)(x-2)}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2\sqrt{x^2+3}-4}{x-1}=2\lim_{x\to 1^+}\frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=$$

$$=2\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=2\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}=2\cdot\frac{2}{4}=1$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ **και ισχύει** $f'(1)=1$

B2. $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x-2},x\neq 2$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-2x+3}{x-2}\right)'=\frac{(x^2-2x+3)'(x-2)-(x^2-2x+3)(x-2)'}{(x-2)^2}=$$

$$=\frac{(2x-2)(x-2)-(x^2-2x+3)\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-4x-2x+4-x^2+2x-3}{(x-2)^2}=$$

$$=\frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$$

$$f'(3)=\frac{9-12+1}{1}=-2$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(3,f(3))$ είναι η $y-f(3)=f'(3)(x-3)$

Είναι $f(3)=\dfrac{9-6+3}{1}=6$

$$y-f(3)=f'(3)(x-3)\Leftrightarrow y-6=-2(x-3)\Leftrightarrow y=-2x+12$$

B3. α) Η συνάρτηση $f(x)=x^2e^x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε αυτό με

$$f'(x)=\left(x^2\right)'\cdot e^x+x^2\cdot\left(e^x\right)'=2xe^x+x^2e^x=e^x(x^2+2x)$$

$$f''(x)=\left(e^x\right)'(x^2+2x)+e^x(x^2+2x)'=e^x(x^2+2x)+e^x(2x+2)=e^x(x^2+4x+2)$$

β)

$$af(x)+\beta f'(x)+\gamma f''(x)=f(x)\Leftrightarrow ax^2e^x+\beta e^x(x^2+2x)+\gamma e^x(x^2+4x+2)=e^xx^2$$

$$\Leftrightarrow e^x(ax^2+\beta x^2+2\beta x+\gamma x^2+4\gamma x+2\gamma)=e^xx^2\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}(a+\beta+\gamma)x^2+(2\beta+4\gamma)x+2\gamma=x^2$$

Από ισότητα πολυωνύμων έχουμε : $\begin{cases} a+\beta+\gamma=1 \\ 2\beta+4\gamma=0 \\ 2\gamma=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ \beta=0 \\ \gamma=0 \end{cases}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x)=e^{x-2}+x-3, x\in\mathbb{R}$

α) Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$. Τότε ,

$$x_1<x_2\Leftrightarrow x_1-2<x_2-2\Leftrightarrow e^{x_1-2}>e^{x_1-2}\quad (1)$$
$$x_1<x_2\Leftrightarrow x_1-3<x_2-2\quad (2)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε :

$f(x_1)<f(x_2)$ Άρα, $f\uparrow\mathbb{R}$

β) $f(x)=0\Leftrightarrow e^{x-2}+x-3=0$

Η εξίσωση έχει προφανή ρίζα το 2 αφού $f(2)=0$. Η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και άρα «1-1» . Επομένως , το 2 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης.

Σύνολο τιμών : $f(\mathbb{R})\underset{f\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{\overset{f\uparrow\mathbb{R}}{=}}\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

Γ2.

$f(x)=x^3-6x^2+11x+2$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Έστω $(x_0,f(x_0))$ το σημείο στο οποίο η εφαπτόμενη της C_f είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2x$. Τότε, $f'(x_0)=2$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3x^2-12x+11$.

$$f'(x)=2\Leftrightarrow 3x^2-12x+11=2\Leftrightarrow 3x^2-12x+9=0\Leftrightarrow 3(x^2-4x+3)=0\Leftrightarrow x=1\ \acute{\eta}\ x=3$$

Άρα έχουμε δύο εφαπτόμενες της C_f παράλληλες στην ευθεία $y=2x$ στα σημεία

(1,f(1)) και (3,f(3)).

Στο σημείο (1,f(1)) ε_1: $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-8=2(x-1)\Leftrightarrow y=2x+6$

Στο σημείο (3,f(3)) ε_2: $y-f(3)=f'(3)(x-3)\Leftrightarrow y-8=2(x-3)\Leftrightarrow y=2x+2$

β) Έστω $(x_1,f(x_1))$ το σημείο στο οποίο η εφαπτόμενη της C_f είναι κάθετη στην

ευθεία $y=\frac{1}{2}x$. Τότε, $f'(x_1)\cdot\frac{1}{2}=-1$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x)=3x^2-12x+11$.

$$f'(x_1)\cdot\frac{1}{2}=-1\Leftrightarrow(3x^2-12x+11)\cdot\frac{1}{2}=-1\Leftrightarrow 3x^2-12x+11=-2\Leftrightarrow 3x^2-12x+13=0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει Δ = 144 − 156=-12<0 άρα δεν υπάρχουν εφαπτόμενες της

C_f που είναι κάθετες στην ευθεία $y=\frac{1}{2}x$.

ΘΕΜΑ Δ

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, συνεχής στο 3 , για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3+h)}{\eta\mu 2h}=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$

Δ1. Θέτουμε $g(h)=\frac{f(3+h)}{\eta\mu 2h}\Leftrightarrow g(h)\eta\mu 2h=f(3+h)$ για h κοντά στο 0.

Ισχύει ότι $\lim\limits_{h\to 0}g(h)=a$. Άρα , $\lim\limits_{h\to 0}f(3+h)=\lim\limits_{h\to 0}(g(h)\eta\mu 2h)=a\cdot 0=0$

$\lim\limits_{h\to 0}f(3+h)=0\underset{\substack{h\to 0\\ x\to 3}}{\overset{x=3+h}{\Leftrightarrow}}\lim\limits_{x\to 3}f(x)=0$ **.** Αφού f συνεχής στο 3 έχουμε ότι f(3)=0.

Δ2.
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h+3)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h+3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(h)\eta\mu 2h}{h}=$$
$$=2\lim_{h\to 0}g(h)\frac{\eta\mu 2h}{2h}=2a\in\mathbb{R}$$

Άρα, f παραγωγίσιμη στο 3 με $f'(3)=2a$

Δ3. α)Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(3,f(3))$ έχει εξίσωση

$y-f(3)=f'(3)(x-3)\Leftrightarrow y=2a(x-3)\Leftrightarrow y=2ax-6a$ και επειδή διέρχεται από

το σημείο N(1,−8) ισχύει $-8=2a-6a\Leftrightarrow -4a=-8\Leftrightarrow a=2$

β)

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)\sqrt{x-2}-f(x)}{x^2-6x+9}=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)(\sqrt{x-2}-1)}{\left(x-3\right)^2}=\lim_{x\to 3}\left(\frac{f(x)}{x-3}\cdot\frac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}\right)=f'(3)\cdot\frac{1}{2}=4\cdot\frac{1}{2}=2$$

διότι $f'(3)=2a=2\cdot 2=4$ και

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2-1}{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}=\frac{1}{2}$$